السنة الثانية باكالوريا علوم رياضية	Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ الحسابيات في المجموعة	04	Prof : BEN ELKHATIR

I- قابلية القسمة في المجموعة $\mathbb{Z}$:

- **تعريف:**

ليكن a و b عددين نسبيين ، نقول إن b يقسم a و نكتب $b | a$ إذا وجد q من $\mathbb{Z}$ بحيث : $a = bq$.

- **إستنتاجات:**

- لكل a من $\mathbb{Z}$ لدينا : $a|a$ و $a|0$ و $1|a$.
- لكل a من $\mathbb{Z}$ أربعة قواسم على الأقل وهي : -1 ، 1 ، $-a$ و a .

إذن : $\forall a \in \mathbb{Z} : \{-1,1,-a,a\} \subseteq D_a$ ، حيث D_a هي مجموعة قواسم العدد a .

- إذا كان $b | a$ و $a \neq 0$ فإن $|b| \leq |a|$ ، و هذا يعني أن D_a مجموعة منتهية .
- مهما يكن (a,b,c) من $\mathbb{Z}^3$ لدينا : $\begin{cases} a|b \\ b|c \end{cases} \Rightarrow a|b$ و $\begin{cases} ab|ac \\ a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow b|c$.

- **خاصيات:**

- ليكن (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ ، إذا كان $q | a$ فإن : $q|b \Leftrightarrow q|b-a$.
- لكل (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ و لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $(b-a)|(b^n - a^n)$.
- مهما يكن (a,b,c) من $\mathbb{Z}^3$ لدينا : $\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a|(b+c) \\ a|(b-c) \end{cases}$.

وبصفة عامة : $\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \Rightarrow \forall (u,v) \in \mathbb{Z}^2 : a|(bu+cv)$.

- **تمرين01:**

1. إذا كان n عددا صحيحا طبيعيا بحيث $7|(n-2)$ ، فبين أن : $7|(n^3-1)$.

2. ليكن (a,b,c) من $\mathbb{N}^3$ بحيث $a|(7b+5c)$ و $a|(4b+3c)$ ، فبين أن : $a|b$ و $a|c$.

- **تمرين02:**

1. حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ المعادلات التالية :

$(E_1): x^2 - y^2 = 16$ و $(E_2): x^2 - 4y^2 = 36$ و $(E_3): 9x^2 - 4y^2 = 44$.

2. حدد جميع قيم العدد الصحيح الطبيعي n التي تحقق على التوالي :

$(1):(n-1)|(n+11)$ و $(2):(n-4)|(3n+24)$ و $(3):(n-3)|(n^2+3)$.

3. حدد جميع قيم العدد النسبي x التي تحقق على التوالي :

$(1):(x-2)|(x+5)$ و $(2):(x+7)|(2x+15)$ و $(3):(x+1)|(x^3+2)$.

4. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 676 | (27^{n+1} - 26n - 27)$ و $\forall n \in \mathbb{N}^* : 11 | (2^{10n-7} + 3^{5n-2} - 2)$.

II- القسمة الأقليدية في $\mathbb{Z}$:

- **خاصية01:**

لكل (a,b) من $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ يوجد زوج وحيد (q,r) من $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ بحيث : $a = bq + r$ و $0 \leq r \prec b$.

العدد q يسمى خارج القسمة الأقليدية ل a على b و r يسمى الباقي .

- **ملحوظة :** لاحظ أن العدد a يقبل القسمة على b إذا وفقط إذا كان الباقي r منعدما .

أي أن : $b|a \Leftrightarrow r = 0$.

- **خاصية02:**

لكل (a,b) من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ يوجد زوج وحيد (q,r) من $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ بحيث : $a = bq + r$ و $0 \leq r \prec |b|$.

- **تمرين03:**

1. أوجد عددا صحيحا طبيعيا n مكون من أربعة أرقام إذا علمت أن باقي القسمة الأقليدية على n لكل من العددين 21685 و 33509 هو 37 و 53 على التوالي .

2. أوجد عددا صحيحا طبيعيا n إذا علمت أن لقسمته الأقليدية على العددين 23 و 17 نفس الخارج و الباقي هو 1 و 3 على التوالي .

3. حدد المقسوم عليه b و الخارج q إذا علمت أن المقسوم هو $a = 557$ و الباقي هو $r = 89$.

4. حدد المقسوم عليه b و الباقي r إذا علمت أن المقسوم هو $a = 1517$ و الخاج هو $q = 75$.

III- الموافقة بترديد n بحيث $n \geq 2$:

- **تعريف:** ليكن n من $\mathbb{N}^*$ بحيث $n \geq 2$ و (a,b) من $\mathbb{Z}^2$.

نقول إن a يوافق b بترديد n و نكتب $a \equiv b[n]$ إذا كان : $n|(b-a)$ ، إذن :

$a \equiv b[n] \Leftrightarrow n|(b-a) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / b = a + kn$.

- **خاصية03:**

يكون عددين نسبيين a و b متوافقين يترديد n إذا و فقط إذا كان لقسمتهما على n نفس الباقي .

- **ملحوظة:**

الموافقة بترديد n علاقة إنعكاسية تماثلية و متعدية ، نقول إنها علاقة تكافؤ .

و لكل a من $\mathbb{Z}$ المجموعة $\{b \in \mathbb{Z} / b \equiv a[n]\} = \{a + kn / k \in \mathbb{Z}\}$ تسمى صنف تكافؤ العدد a و يرمز لها بالرمز $\overline{a}$.

- **خاصية04:**

لكل a من $\mathbb{Z}$ يوجد r من $\{0,1,2,....,n-1\}$ بحيث: $a \equiv r[n]$ (r هو باقي قسمة a على n) .

إذن : $\forall a \in \mathbb{Z}; \exists r \in \{0,1,2,....,n-1\} / \overline{a} = \overline{r}$.

و بالتالي فمجموعة أصناف تكافؤ علاقة الموافقة بترديد n هي : $\left\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},....,\overline{n-1}\right\}$

و يرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ، إذن : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\left\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},....,\overline{n-1}\right\}$.

- **خاصية05:**

- مهما يكن (a,b,c,d) من $\mathbb{Z}^4$ و n من $\mathbb{N}^*$ بحيث $n\geq 2$ لدينا :

$$\begin{cases}a\equiv b\,[n]\\ c\equiv d\,[n]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+c\equiv b+d\,[n]\\ ac\equiv bd\,[n]\end{cases}$$

نعبر عن هذه الخاصيات بقولنا ان الموافقة بترديد n منسجمة مع عمليتي الجمع و الضرب .

- و من الخاصيات السابقة نستنتج أن :

$$\begin{cases}a\equiv b\,[n]\\ c\equiv d\,[n]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\forall(u,v)\in\mathbb{Z}^2: ua+vc\equiv ub+vd\,[n]\\ \forall p\in\mathbb{N}: a^p\equiv b^p\,[n]\end{cases}$$

- **مبرهنة: (مصاديق قابلية القسمة على 2 و3 و5 و9 و11 و25)**

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا و $a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+.....+a_1\times10+a_0$ كتابته في نظمة العد العشري . ($\forall k\in\{0,1,2,...,n\}: a_k\in\{0,1,2,...,9\}$) ، نكتب : $a=\overline{a_na_{n-1}..a_0}$.

يكون العدد a قابلا للقسمة على **2** (على التوالي على **5**) إذا و فقط إذا كان رقم وحداته a_0 يقبل القسمة على **2** (على التوالي على **5**) .

يكون العدد a قابلا للقسمة على **3** (على التوالي على **9**) إذا و فقط إذا كان: $a_n+a_{n-1}+.....+a_0$ يقبل القسمة على **3** (على التوالي على **9**) .

يكون العدد a قابلا للقسمة على **4** (على التوالي على **25**) إذا و فقط إذا كان العدد $\overline{a_1a_0}$ يقبل القسمة على **4** (على التوالي على **25**)

بمعنى أن : $\overline{a_1a_0}\equiv0[4]$ (على التوالي $\overline{a_1a_0}\equiv0[25]$)

يكون العدد a قابلا للقسمة على **11** إذا و فقط إذا كان: $d=a_0-a_1+a_2-a_3+...+(-1)^n a_n$ يقبل القسمة على **11** .

- **تمرين04:**

1. حدد رقم الوحدات x لكي يقبل العدد $a=\overline{37568x}$ القسمة على **11** .

2. حدد الرقمين x و y لكي يقبل العدد $b=\overline{28x75y}$ القسمة على **3** و **11** .

3. حدد الأرقام x و y و z لكي يقبل العدد $c=\overline{13xy45z}$ القسمة على **8** و **9** و **11** .

4. ما هو باقي القسمة الأقليدية للعدد $a=11257^{304}$ على **11** ؟

5. بين أن العدد $e=\overline{cdu}$ يقبل القسمة على **8** إذا و فقط إذا كان $4c+2d+u$ يقبل القسمة على **8** .

- **الجمع و الضرب في المجموعة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:**

- **تعريف:** لكل (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ نضع : $\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}$ و $\bar{a}\times\bar{b}=\overline{a\times b}$.

- **أمثلة:** لننشيء جدولي عمليتي الجمع و الضرب في المجموعة : $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}=\left\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\right\}$.

الجمع في $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

الضرب في $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

- **تمرين05:**

1. بين أنه لكل (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ لدينا :

$$(a\equiv0[7] \text{ و } b\equiv0[7]) \Leftrightarrow a^2+b^2\equiv0[7]$$

2. لتكن S مجموعة حلول المعادلة : $x^3\equiv1[7]$ حيث $x\in\mathbb{Z}$.

تحقق من أن : $\{2,4\}\subset S$ ، ثم حدد مجموعة الحلول S .

3. نعتبر العددين $A=5^{2000}$ و $B=4^{1000}$.

بين أن : $A\equiv4[7]$ و $B\equiv4[7]$ ثم إستنتج أن : $A+B\equiv1[7]$.

4. ليكن (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $a\equiv b\,[n]$.

حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات التالية :

$p:\forall x\in\mathbb{Z}:(a-x)\equiv(b-x)[n]$ و $q:(a+n)\equiv b\,[n]$ و $r: a!\equiv b![n]$.

5. بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $n^3-n\equiv0[2]$ و $n^3-n\equiv0[6]$.

هل العدد $P(n)=n^3-n$ يقبل القسمة على الأعداد التالية **3** و **4** و **12** ؟ علل جوابك .

III- القاسم المشترك الأكبر:

1. تعريف:

ليكن a و b عددين نسبيين غير منعدمين ، المجموعة $D_a \cap D_b$ المكونة من القواسم المشتركة للعددين a و b تقبل أكبر عنصر يرمز له بالرمز $a \wedge b$ و يسمى القاسم المشترك الأكبرل a و b ، لدينا إذن :

- $d = a \wedge b \Leftrightarrow d \mid a$ و $d \mid b$ و $(\forall k \in \mathbb{Z} / \ k \mid a$ و $k \mid b : k \leq d)$

- **مثال:** لدينا : $D_{30} = \{-30,-15,-6,-5,-2,-1,1,2,5,6,15,30\}$

و $D_{54} = \{-54,-27,-18,-9,-6,-3,-2,-1,1,2,3,6,9,18,27,54\}$

إذن : $D_{30} \cap D_{54} = \{-6,-2,-1,1,2,6\}$ ، وبالتالي : $30 \wedge 54 = 6$.

2. خاصيات:

- لكل a و b من $\mathbb{Z}^*$ لدينا : $a \wedge b = b \wedge a = |a| \wedge b = a \wedge |b| = |a| \wedge |b|$.
- و لكل a من $\mathbb{Z}$ لدينا : $a \wedge 0 = |a|$ و $a \wedge 1 = 1$ و $a \wedge b = |b| \Leftrightarrow b \mid a$.
- مهما يكن (a,b,c) من $\mathbb{Z}^3$ لدينا : $(ab) \wedge (ac) = |a|(b \wedge c)$.
- و إذا كان d قاسما مشتركا للعددين a و b فإن : $\left(\frac{a}{d}\right) \wedge \left(\frac{b}{d}\right) = \frac{(a \wedge b)}{|d|}$ ، وبصفة خاصة

إذا كان $a \wedge b = \delta$ فإن : $\left(\frac{a}{\delta}\right) \wedge \left(\frac{b}{\delta}\right) = 1$.

- مهما يكن a و b و q من $\mathbb{Z}^*$ لدينا : $a \wedge b = (a - bq) \wedge b$.

3. خوارزمية أقليدس أو طريقة القسمات المتتالية:

- **خاصية06:**

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين بحيث $a \succ b$ و b لا يقسم a ، إذا كان r هو باقي القسمة الأقليدية ل a على b فإن : $a \wedge b = b \wedge r$.

- **طريقة القسمات المتتالية:**

لتحديد القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ($a \succ b$ و b لا يقسم a) ، ننجز القسمة الأقليدية ل a على b إذن : $a = bq_1 + r_1$ حيث $0 \prec r_1 \prec b$ و لدينا $a \wedge b = b \wedge r_1$.

ثم ننجز القسمة الأقليدية ل b على r_1 : $b = r_1 q_2 + r_2$ حيث $0 \leq r_2 \prec r_1$ و لدينا $b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2$.

إذا كان $r_2 = 0$ فإن $r_1 \wedge 0 = r_1$ إذن : $a \wedge b = r_1$

أما إذا كان $r_2 \neq 0$ فإننا نتابع طريقة القسمات المتتالية إلى أن يكون الباقي $r_k = 0$

و يكون لدينا في هذه الحالة : $a \wedge b = r_{k-1}$.

و بالتالي: فالقاسم المشترك الأكبر لعددين a و b حيث $a \succ b$ و b لا يقسم a هو آخر باقي غير منعدم للقسمات المتتالية للعدد a على b .

- **مثال:** لنحدد القاسم المشترك الأكبر للعددين $a = 33810$ و $b = 4116$.

الخارج	$q_1 = 8$	$q_2 = 4$	$q_3 = 1$	$q_4 = 2$
$a = 33810$	$b = 4116$	$r_1 = 882$	$r_2 = 588$	$r_3 = 294$
$r_1 = 882$	$r_2 = 588$	$r_3 = 294$	$r_4 = 0$	الباقي

من جدول القسمات المتتالية نستنتج أن : $33810 \wedge 4116 = 294$.

- **تمرين06:**

1. حدد $5633 \wedge 4847$ و $5617 \wedge 813$ مستعملا خوارزمية أقليدس .

2. أ- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : (5n^3 - n) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 38$.

ثم إستنتج قيم $(5n^3 - n) \wedge (n+2)$ الممكنة .

ب- حدد جميع قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي يكون من أجلها على التوالي :

$(1) : (n+2) \mid (5n^3 - n)$ و $(2) : (5n^3 - n) \wedge (n+2) = 19$

- **خاصية07:**

لكل a و b من $\mathbb{Z}^*$ لدينا : $a \wedge b = \delta \Leftrightarrow \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 / \delta = au + bv$.

- **ملحوظة:** إذا كان a و b عددين نسبيين غير منعدمين بحيث $a \wedge b = \delta$ فخوارزمية أقليدس تمكننا من إيجاد زوج (u,v) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $\delta = au + bv$.

- **مثال:** نعتبر العددين $a = 120$ و $b = 35$ ، ننجز القسمات المتتالية ل a على b فنحصل على :

الخارج	$q_1 = 3$	$q_2 = 2$	$q_3 = 3$
$a = 120$	$b = 35$	$r_1 = 15$	$r_2 = 5$
$r_1 = 15$	$r_2 = 5$	$r_3 = 0$	الباقي

من جهة لدينا : $120 \wedge 35 = 5$.

و من جهة أخرى : $120 = 3 \times 35 + 15$ إذن : $15 = 120 - 3 \times 35$

و $5 = 35 - 2 \times 15 = 35 - 2 \times (120 - 3 \times 35) = -2 \times 120 + 7 \times 35$

إذن : $5 = -2 \times 120 + 7 \times 35$.

IV- الأعداد الأولية فيما بينها:

1. تعريف:

نقول إن عددين نسبيين غير منعدمين a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا كان : $a\wedge b=1$.

2. مبرهنة بوزو و نتائجها:

- **مبرهنة بوزو (thérème de Bezout)**

يكون عددين نسبيين غير منعدمين a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد (u,v) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث :

$au+bv=1$.

- **تمرين07:**

1. بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا :

$n\wedge(n+1)=1$ و $(2n+1)\wedge(9n+4)=1$ و $(3n-2)\wedge(5n-3)=1$.

2. حدد جميع قيم n من $\mathbb{N}$ بحيث $n\geq 4$ التي يكون من أجلها الكسر $\dfrac{n^2-7n+15}{n-3}$ غير قابل للإختزال .

3. حدد جميع قيم n من $\mathbb{N}$ بحيث $n\geq 4$ التي يكون من أجلها الكسر $\dfrac{n^2-7n+15}{n-3}$ عدد صحيحا طبيعيا .

- **مبرهنة كوص (théoreme de Gauss)**

لتكن a و b و c ثلاثة أعداد نسبية غير منعدمة .

- إذا كان $a|bc$ و $a\wedge b=1$ فإن : $a|c$.

- **إستنتاج:**

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

لكل a و b و c من $\mathbb{Z}^*$ لدينا : ($ab\equiv ac[n]$ و $a\wedge n=1$) $\Rightarrow b\equiv c[n]$.

- **تمرين08:**

ليكن a و b من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $a\wedge b=1$ و $a\succ b$ ، بين أن :

$(a+b)\wedge(a-b)=1$ أو $(a+b)\wedge(a-b)=2$.

- **خاصية07:**

مهما يكن (a,b,c) من $\mathbb{Z}^3$ لدينا : $a\wedge(bc)=1 \Leftrightarrow$ ($a\wedge c=1$ و $a\wedge b=1$)

و بصفة عامة لكل (a,b,c,d) من $\mathbb{Z}^4$ لدينا : $(ac)\wedge(bd)=1 \Leftrightarrow$ ($c\wedge d=1$ و $a\wedge b=1$)

و بصفة خاصة : $a\wedge b=1 \Rightarrow \forall(n,m)\in\mathbb{N}^2 : a^n\wedge b^m=1$.

- **خاصية08:**

مهما يكن (a,b,c) من $\mathbb{Z}^3$ لدينا : $(ab)|c \Rightarrow$ ($a|c$ و $b|c$ و $a\wedge b=1$) .

V- حل المعادلة $ax+by=c$ في المجموعة $\mathbb{Z}^2$:

- **مثال01:**

لنحل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 5x+3y=1$.

لدينا : $5\times(-1)+3\times 2=1$ ، إذن الزوج $(-1,2)$ حل خاص للمعادلة (E) .

و من جهة أخرى لدينا : $\begin{cases}5x+3y=1\\ 5\times(-1)+3\times 2=1\end{cases}$ ، إذن : $5(x+1)+3(y-2)=0$

أي أن : $5(x+1)=-3(y-2)$

و حسب مبرهنة كوص فإن : $3|(x+1)$ (لأن : $3|5(x+1)$ و $3\wedge 5=1$)

ومنه فإن : $x=-1+3k$ و $y=2-5k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $S=\{(-1+3k,2-5k)/k\in\mathbb{Z}\}$.

- **خاصية09:**

إذا كان a و b عددين نسبيين أوليين فيما بينهما فمجموعة حلول المعادلة $ax+by=1$ في $\mathbb{Z}^2$ هي :

$S=\{(x_0+kb,y_0-ka)/k\in\mathbb{Z}\}$ ، حيث (x_0,y_0) حل خاص .

- **تمرين09:**

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 437x-241y=1$.

- **مثال02:**

لنحل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 26x+65y=13$.

لدينا : $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : 26x+65y=13 \Leftrightarrow 2x+5y=1$

ومن جهة أخرى : $2\times(-2)+5\times 1=1$ إذن الزوج $(-2,1)$ حل خاص للمعادلة $2x+5y=1$

وبالتالي فمجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{(-2+5k,1-2k)/k\in\mathbb{Z}\}$.

- **خلاصة:**

لكل عددين نسبيين غير منعدمين a و b لدينا : $ax+by=a\wedge b \Leftrightarrow a'x+b'y=1$

حيث : $a=(a\wedge b)a'$ و $b=(a\wedge b)b'$.

و بما أن $a'\wedge b'=1$ فإن مجموعة الحلول هي : $S=\{(x_0+kb',y_0-ka')/k\in\mathbb{Z}\}$

حيث (x_0,y_0) حل خاص للمعادلة : $a'x+b'y=1$.

• **حل المعادلة** $(E): ax+by=c$ **حيث** $(a,b)\in\mathbb{Z}^{*2}$ **و** $c\in\mathbb{Z}$ **:**

- **مثال03:**

لنحل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E): 27x-39y=12$.

لدينا : $27\wedge 39=3$ و $3|12$ ، إذن : $(E)\Leftrightarrow 9x-13y=4$

ومن جهة أخرى لدينا : $9\times3-13\times2=1$ ، إذن $(3,2)$ حل خاص للمعادلة : $9x-13y=1$

و بالتالي حل خاص للمعادلة $9x-13y=4$ هو : $(12,8)$ ولدينا :

$(E)\Leftrightarrow 9(x-12)=13(y-8)$ و بتطبيق مبرهنة كوص نحصل على :

$x=12+13k$ و $y=8+9k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، و بالتالي فمجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$S=\{(12+13k,8+9k)/k\in\mathbb{Z}\}$.

- **خلاصة:**

المعادلة $(E): ax+by=c$ تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ إذا وفقط إذ كان $c|(a\wedge b)$ ، وفي هذه الحالة

نضع : $a=(a\wedge b)a'$ و $b=(a\wedge b)b'$ و $c=(a\wedge b)c'$ فيصبح لدينا :

$(E)\Leftrightarrow a'x+b'y=c'$ حيث $a'\wedge b'=1$.

نبحث عن حل خاص (x_0,y_0) للمعادلة : $a'x+b'y=1$ ، و حل خاص للمعادلة : $a'x+b'y=c'$

هو $(c'x_0,c'y_0)$ و لدينا : $(E)\Leftrightarrow a'(x-c'x_0)=b'(c'y_0-y)$

و بتطبيق مبرهنة كوص نحصل على : $x=c'x_0+kb'$ و $y=c'y_0-ka'$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

و بالتالي فإن : $S=\{(c'x_0+kb',c'y_0-ka')/k\in\mathbb{Z}\}$.

- **تمرين10:**

1. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلات التالية :

$(1): 3x-4y=10$ و $(2): 3x-5y=13$ و $(3): 7x-9y=1$

$(4): 39x-45y=6$ **و** $(5): 4x+3y=5$ **و** $(6): 26x+15y=4$ **.**

2. حدد أصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم n الذي باقي قسمته الأقليدية على العددين **52** و **64** هو **7 .**

3. حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ النظمة :

$$\begin{cases}2x+3y=78\\-6\le x\le 21\\-5\le y\le 14\end{cases}.$$

VI- المضاعف المشترك الأصغر:

1. تعريف:

المضاعف المشترك الأصغر لعددين نسبيين غير منعدمين a و b هو أصغر مضاعف مشترك موجب قطعا لهما معا و يرمز له ب $a\vee b$ أو $ppcm(a,b)$.

بصفة خاصة $b|a\Leftrightarrow a\vee b=|a|$ ، و لكل a من $\mathbb{Z}^*$ لدينا : $a\vee 1=|a|$ و $a\vee a=|a|$.

2. خاصيات:

• لكل (a,b) من $\mathbb{Z}^{*2}$ لدينا : $a\vee b=b\vee a=|a|\vee b=a\vee|b|=|a|\vee|b|$.

• مهما يكن (a,b,c) من $\mathbb{Z}^{*3}$ لدينا : $(ab)\vee(ac)=|a|(b\vee c)$.

• إذا كان d قاسما مشتركا للعددين a و b فإن : $\left(\frac{a}{d}\right)\vee\left(\frac{b}{d}\right)=\frac{(a\vee b)}{|d|}$.

• لكل (a,b) من $\mathbb{Z}^{*2}$ لدينا: $a\wedge b=1\Leftrightarrow a\vee b=|ab|$ و $(a\vee b)\times(a\wedge b)=|ab|$.

- **تمرين11:**

1. أحسب $n\vee(n+2)$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

2. بين أن : $\forall(a,b)\in\mathbb{N}^2: a\wedge b=1\Leftrightarrow(a+b)\wedge(ab)=1$ ، ثم إستنتج أن :

$\forall(a,b)\in\mathbb{N}^2: a\wedge b=(a+b)\wedge(a\vee b)$.

3. حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ النظمة :

$$(1):\begin{cases}a+b=68\\a\vee b=240\end{cases}.$$

- **تمرين12:**

1. لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $A=3n+4$ و $B=9n-5$.

أ- حدد $A\wedge B$ تبعا لقيم n من $\mathbb{N}^*$.

ب- حدد قيم n من $\mathbb{N}^*$ التي يكون من أجلها : $(2):\begin{cases}A\wedge B=17\\A\vee B=884\end{cases}$.

2. أ- حدد جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية التي مربعها يقسم العدد **1980** .

ب- حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ المعادلة : $(3): (a\vee b)^2-5(a\wedge b)^2=1980$.

3. حل في المجموعة $\mathbb{N}^2$ النظمة :

$$(4):\begin{cases}x\vee y=210(x\wedge y)\\y-x=x\wedge y\end{cases}.$$

VII- الأعداد الأولية:

1. تعريف:

ليكن p من $\mathbb{N}$ بحيث $p \ge 2$ ، نقول إن p عدد أولي إذا كان له قاسمان فقط في $\mathbb{N}$ هما 1 و p .

- **مثال:**

الأعداد العشر الأولى الأولية هي : **2** ، **3** ، **5** ، **7** ، **11** ، **13** ، **17** ، **19** ، **23** و **29** .
و هذه الأعداد كلها فردية ماعدا **2** فهو عدد زوجي .

- **تمرين13:**

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث $n \ge 2$ ، بين أن :

(n عدد أولي) $\Rightarrow$ ($2^n - 1$ عدد أولي) .

هل العكس صحيح أم خاطيء ؟ علل جوابك .

2. ملحوظات:

- لكل عددين أوليين p و q بحيث $p \ne q$ لدينا : $p \wedge q = 1$.
- ليكن a من $\mathbb{Z}$ ، إذا كان p عددا أوليا لا يقسم a فإن $p \wedge a = 1$ و بصفة خاصة :

$\forall k \in \{1,2,3,....,p-1\} : p \wedge k = 1$.

3. خاصيات:

- **خاصية10:** كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n يقبل على الأقل قاسما أوليا p .
- **خاصية11:** كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n يقبل قاسما أوليا p بحيث $p^2 \le n$.
- **خاصية12:** إذا كانت a_1 و a_2 و . . . و a_n أعدادا نسبية و p عدد أولي ، فإن :

$p \mid (a_1 a_2 ... a_n) \Leftrightarrow \exists k \in \{1,2,...,n\} / p \mid a_k$.

- **خاصية13:** مجموعة الأعداد الأولية مجموعة غير منتهية و يرمز لها بالرمز $\mathbb{P}$.

4. مبرهنتي فيرما:

- **تمرين14:**

1. ليكن p عددا أوليا ، بين أن : $\forall k \in \{1,2,....,p-1\} : p \mid C_p^k$.
2. إستنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} : n^p \equiv n [p]$.
3. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : n \wedge p = 1 \Rightarrow n^{p-1} \equiv 1 [p]$.

- **مبرهنة:**

إذا كان p عددا أوليا فإن : $\forall a \in \mathbb{Z} : a^p \equiv a [p]$ (**le petit théorème de Fermat**)

و إذا كان $p \wedge a = 1$ فإن : $a^{p-1} \equiv 1 [p]$. (**مبرهنة Fermat**)

- **تطبيقات مبرهنة فيرما:**
- **تمرين15:**

1. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : n^5 \equiv n [5]$ ، ثم إستنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}; \forall p \in \mathbb{N}^* : n^{p+4} \equiv n^p [5]$.
2. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}; \forall p \in \mathbb{N}^* : n^{p+4} \equiv n^p [2]$ ، ثم إستنتج أن للعددين n^{p+4} و n^p نفس رقم الوحدات .

- **تمرين16:**

بين أن : $\forall a \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a^{561} \equiv a[3] \\ a^{561} \equiv a[11] \\ a^{561} \equiv a[17] \end{cases}$ ، ثم إستنتج أن : $\forall a \in \mathbb{Z} : a^{561} \equiv a[561]$.

5. مبرهنة ويلسون:

- **تمرين16:** ليكن p عددا أوليا بحيث $p \ge 3$.

i. بين أن : $(p-1)^2 \equiv 1[p]$.

ii. بين أن : $\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 \equiv 1[p] \Leftrightarrow$ ($x \equiv 1[p]$ أو $x \equiv -1[p]$) .

iii. بين ان : $\forall x \in \{1,2,3,...p-1\}; \exists u \in \{1,2,3,...,p-1\} / ux \equiv 1[p]$.

iv. أثبت أن : $(p-1)! \equiv (p-1)[p]$.

v. بين أن : p عدد أولي $\Rightarrow (p-1)! \equiv (p-1)[p]$.

- **مبرهنة ويلسون (théorème de wilson)**

إذا كان p عددا صحيحا طبيعيا بحيث $p \ge 3$ فإن : p عدد أولي $\Leftrightarrow (p-1)! \equiv -1[p]$.

VIII- التفكيك إلى جداء من عوامل أولية:

- **مبرهنة:**

كل عدد صحيح نسبي n بحيث $|n| \ge 2$ يمكن كتابته بكيفية وحيدة على شكل: $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} .... p_k^{\alpha_k}$
حيث $\varepsilon = sg(n) = \pm 1$ ، $k \in \mathbb{N}^*$ ، $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \in \mathbb{N}^{*k}$ و p_1 و p_2 و . . . و p_k أعداد أولية موجبة قطعا و مختلفة فيما بينها مثنى مثنى .

- **ملحوظة و نتائج:**

- الكتابة السابقة للعدد n تسمى تفكيكا ل n إلى جداء عوامل أولية ، و الأعداد p_1 و p_2 و . . . و p_k هي قواسم n الأولية الموجبة .
- يكون عدد d قاسما ل n إذا وفقط إذا كان يكتب على شكل: $d = \varepsilon p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} .... p_k^{\beta_k}$ حيث $\varepsilon = \pm 1$ و $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ لكل i من $\{1,2,...,k\}$.
- يكون عدد m مضاعفا ل n إذا وفقط إذا كان يكتب على شكل $m = \varepsilon p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} .... p_r^{\gamma_r}$ حيث $\varepsilon = \pm 1$ و $\alpha_i \le \gamma_i$ لكل i من $\{1,2,...,k\}$ و $\gamma_i \ge 0$ لكل i من $\{k+1, k+2, ..., r\}$.

- **خاصية14:**

إذا كان a و b عددين صحيحين طبيعيين و $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$ مجموعة القواسم الأولية ل a أو b فإن :

$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ و $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_k^{\beta_k}$ حيث : $\alpha_i \geq 0$ و $\beta_i \geq 0$ لكل i من $\{1, 2, ..., k\}$

و لدينا : $\begin{cases} a \wedge b = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} ... p_k^{\gamma_k} \\ a \vee b = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} ... p_k^{\delta_k} \end{cases}$ حيث : $\forall i \in \{1, 2, ..., k\} : \begin{cases} \gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i) \\ \delta_i = \max(\alpha_i, \beta_i) \end{cases}$.

- **تمرين17:**

1. ليكن r عددا جذريا ، نقول إن r عدد عشري إذا وجد m من $\mathbb{N}$ بحيث $r \times 10^m \in \mathbb{Z}$.

نضع $r = \frac{p}{q}$ حيث $p \in \mathbb{Z}$ ، $q \in \mathbb{N}^*$ و $p \wedge q = 1$.

بين أن : r عدد عشري $\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 / r = 2^\alpha \times 5^\beta$.

2. ليكن n من $\mathbb{N}$ بحيث $n \geq 2$ و p قاسم أولي للعدد $n!$.

أ- حدد أس p في تفكيك $n!$ إلى جداء عوامل أولية ، ثم اعط تفكيك العدد $14!$ إلى جداء عوامل أولية

ب- أوجد عدد الأصفار التي تنتهي بها كتابة العدد $100!$ في نظمة العد العشري .

3. لكل n من $\mathbb{N}$ بحيث $n \geq 2$ نضع : $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ حيث $\alpha_i \geq 1$ و p_1 و . . . و p_r أعداد أولية .

أ- بين بالترجع على r أن مجموع قواسم العدد n الصحيحة الطبيعية هو : $S(n) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$.

ب- بين أنه لكل n و m من $\mathbb{N}$ بحيث $n \geq 2$ ، $m \geq 2$ و $n \wedge m = 1$ لدينا :

$$S(m.n) = S(m).S(n)$$

VIV- نظمات العد:

1. تقديم:

- لتمثيل الأعداد الصحيحة الطبيعية في نظمة العد العشري نستعمل الأرقام : **0** و **1** و **2** و . . . و **9** نقول إن أساس نظمة العد العشري هو **10** (لأننا إستعملنا عشرة أرقام) .

- مثلا **8 256** هو العدد : $8 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 5 \times 10 + 6$

و $4 \times 10^6 + 3 \times 10^5 + 9 \times 10^2 + 7 \times 10$ هو العدد : **4 300 970** .

- لتمثيل الأعداد الصحيحة الطبيعية في نظمة العد الإثناني نستعمل فقط الرقمين : **0** و 1 ، أساس نظمة العد الإثناني هو **2** .

- العدد **29** يكتب على الشكل : $29 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2 + 1$ ، نكتب : $29 = \overline{11101}_{(2)}$

و هذا هو تمثيل العدد **29** في نظمة العدد الإثناني .

2. نظمات العد ذات الأساس b بحيث $b \in \mathbb{N}^* - \{1\}$:

- **مبرهنة:** ليكن b عددا صحيحا طبيعيا بحيث $b \geq 2$.

لكل a من $\mathbb{N}$ يوجد عدد صحيح طبيعي وحيد k بحيث : $a = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + ... + a_1 b + a_0$

حيث : $\forall i \in \{0, 1, ..., k\} : 0 \leq a_i \leq b - 1$ و $a_k \neq 0$.

نكتب : $a = \overline{a_k a_{k-1} ... a_1 a_0}_{(b)}$ وهذه الكتابة تسمى تمثيلا للعدد a في نظمة العد ذات الأساس b .

- **ملحوظات:**

الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين **0** و **b-1** تمثل برموز تسمى أرقاما : في نظمة العد العشري نستعمل الرموز (أي الأرقام) : **0** و **1** و . . . و **9** .

في نظمة العد ذات الأساس **12** نستعمل الرموز : $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \alpha, \beta\}$ حيث α و β يمثلان على التوالي العددين **10** و **11** في نظمة العد العشري .

مثلا : $\overline{\alpha 21 \beta 7}_{(12)}$ يمثل العدد $a = 10 \times 12^4 + 2 \times 12^3 + 12^2 + 11 \times 12 + 7$ في نظمة العد العشري.

- **تمرين18:**

1. أكتب في نظمة العدد ذات الأساس **4** تمثيل العدد الذي يكتب **342** في نظمة العد العشري .

2. في نظمة العد ذات الأساس **5** أحسب : $x + y$ و $y - x$ و $x.y$ حيث :

$x = \overline{232}_{(5)}$ و $y = \overline{1341}_{(5)}$.

1. لدينا : $342 = 4 \times 85 + 2$ و $85 = 4 \times 21 + 1$ و $21 = 4 \times 5 + 1$

و $5 = 4 \times 1 + 1$ و $1 = 4 \times 0 + 1$.

إذن :
$$\begin{aligned} 342 &= 4(4 \times 21 + 1) + 2 \\ &= 4^2(4 \times 5 + 1) + 4 + 2 \\ &= 4^3(4 \times 1 + 1) + 4^2 + 4 + 2 \\ &= 4^4 + 4^3 + 4^2 + 4 + 2 \end{aligned}$$

و بالتالي فإن : $342 = \overline{11112}_{(4)}$

و نلاحظ أن الأرقام التي تمثل **342** في نظمة العد ذات الأساس **4** هي بواقي القسمات المتتالية للعدد **342** على **4** .

2. نضع $b = 5$ ، إذن : $x = 2b^2 + 3b + 2$ و $y = b^3 + 3b^2 + 4b + 1$

و بالتالي : $x + y = 2b^3 + b^2 + 2b + 3$ أي : $x + y = \overline{2123}_{(5)}$

و $y - x = b^3 + b^2 + 4$ أي : $y - x = \overline{1104}_{(5)}$

و $x.y = 4b^5 + 3b^4 + 3b^3 + 2b^2 + b + 2$ أي : $x.y = \overline{433212}_{(5)}$.